Mathematik: Analyse und Ansätze
Grundstufe
1. Klausur

1. Mai 2024

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

1 Stunde 30 Minuten

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze GS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[80 Punkte]**.

2224 – 9718

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

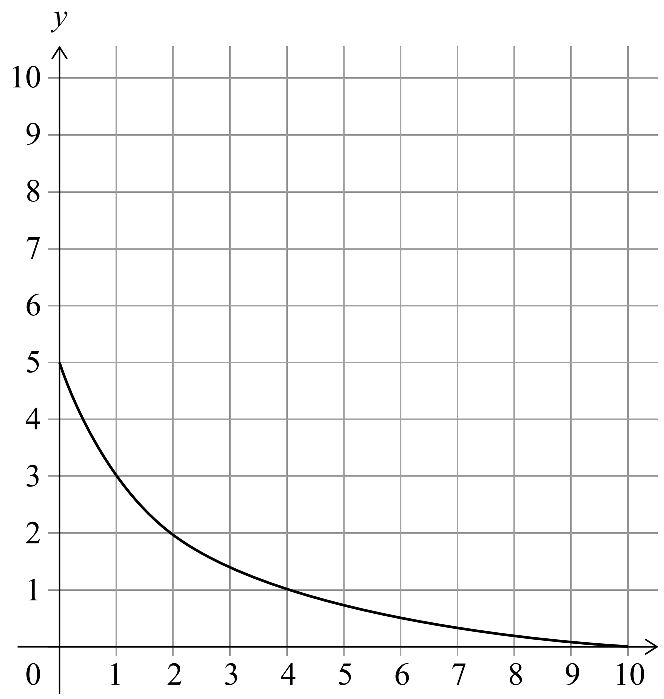
Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 5]

Der Graph von $y = f(x)$ for $0 \leq x \leq 10$ ist im folgenden Diagramm dargestellt.

Der Graph schneidet die Achsen bei $(10, 0)$ und $(0, 5)$.



(a) Notieren Sie die Werte von

(i) $f(4)$;

(ii) $f \circ f(4)$;

(iii) $f^{-1}(3)$. [3]

(b) Skizzieren Sie im obigen Diagramm den Graphen von $y = f^{-1}(x)$. Zeigen Sie deutlich, wo der Graph die Achsen schneidet. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

2. [Maximale Punktzahl: 4]

Lösen Sie $\tan(2x - 5°) = 1$ für $0° \leq x \leq 180°$.

3. [Maximale Punktzahl: 5]

(a) Lösen Sie $3m^2 + 5m - 2 = 0$. [3]

(b) Lösen Sie unter Nutzung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode, $3 \times 9^x + 5 \times 3^x - 2 = 0$. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

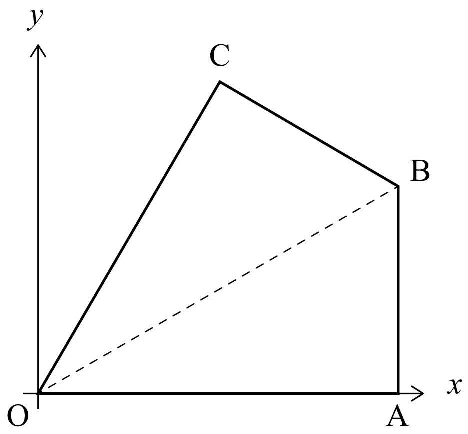
. . . .

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

4. [Maximum mark: 7]

Im folgenden Koordinatensystem ist das Viereck OABC dargestellt.



OABC ist symmetrisch zur Achse $[\mathrm{OB}]$.

A hat die Koordinaten $(6, 0)$ und C hat die Koordinaten $\left(3, 3\sqrt{3}\right)$.

(a) (i) Notieren Sie die Koordinaten des Mittelpunkts von $[\mathrm{AC}]$.

(ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode, die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte O und B verläuft. [4]

(b) Unter der Voraussetzung, dass $[\mathrm{OA}]$ senkrecht zu $[\mathrm{AB}]$ verläuft, finden Sie den Flächeninhalt des Vierecks OABC. [3]

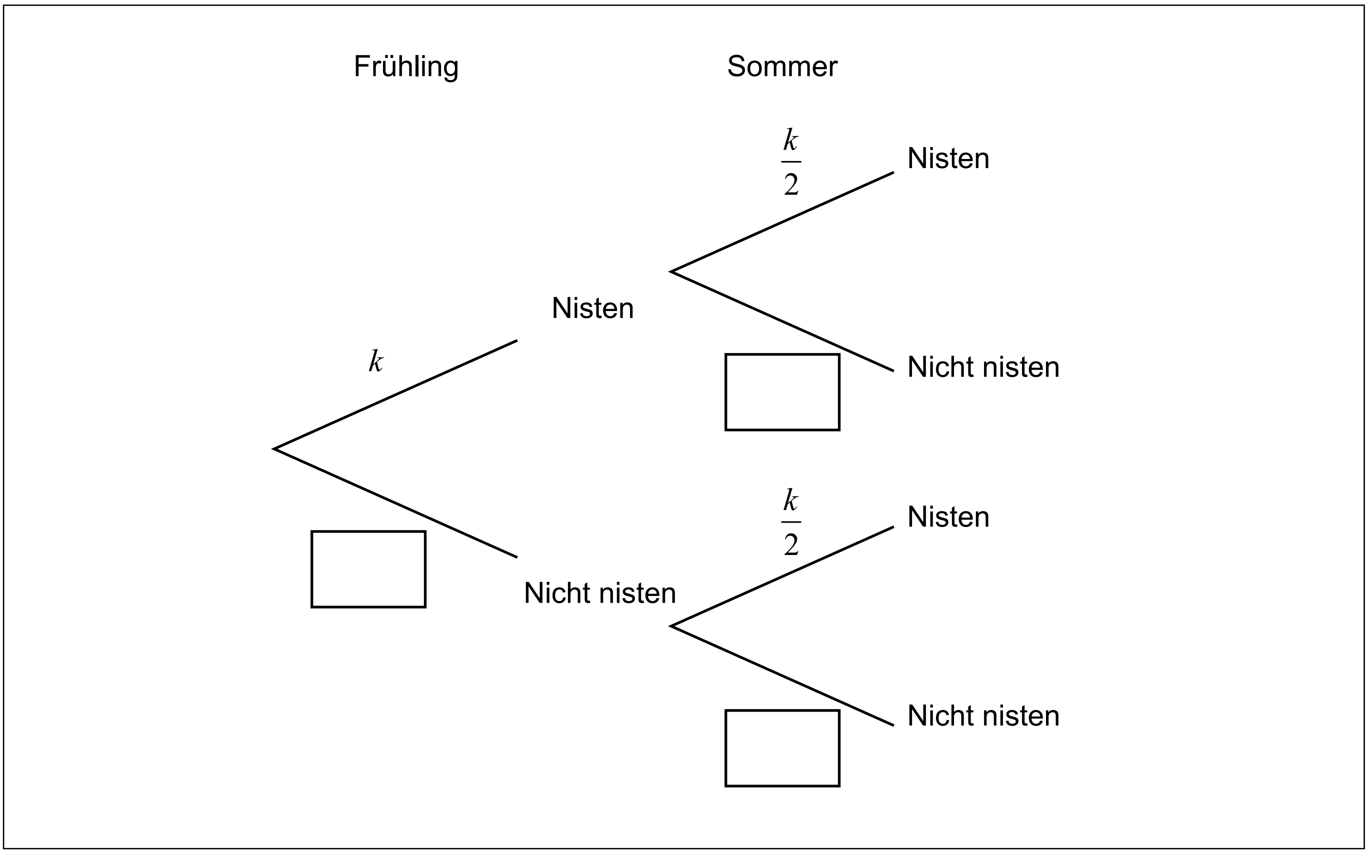
5. [Maximale Punktzahl: 6]

Eine Vogelart kann in den zwei Jahreszeiten Frühling und Sommer nisten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie im Frühling nistet, beträgt k.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie im Sommer nistet, beträgt $\frac{k}{2}$.

Dies ist im folgenden Baumdiagramm dargestellt.



(a) Vervollständigen Sie das Baumdiagramm mit den Wahrscheinlichkeiten, dass die Vögel in der jeweiligen Jahreszeit nicht nisten. Notieren Sie Ihre Antworten abhängig von k. [2]

Es ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Vögel weder im Frühjahr noch im Sommer nisten, $\frac{5}{9}$ beträgt.

(b) (i) Zeigen Sie, dass $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

(ii) Sowohl $k = \frac{1}{3}$ als auch $k = \frac{8}{3}$ erfüllen die Gleichung $9k^2 - 27k + 8 = 0$.

Geben Sie an, warum $k = \frac{1}{3}$ die einzig gültige Lösung ist. [4]

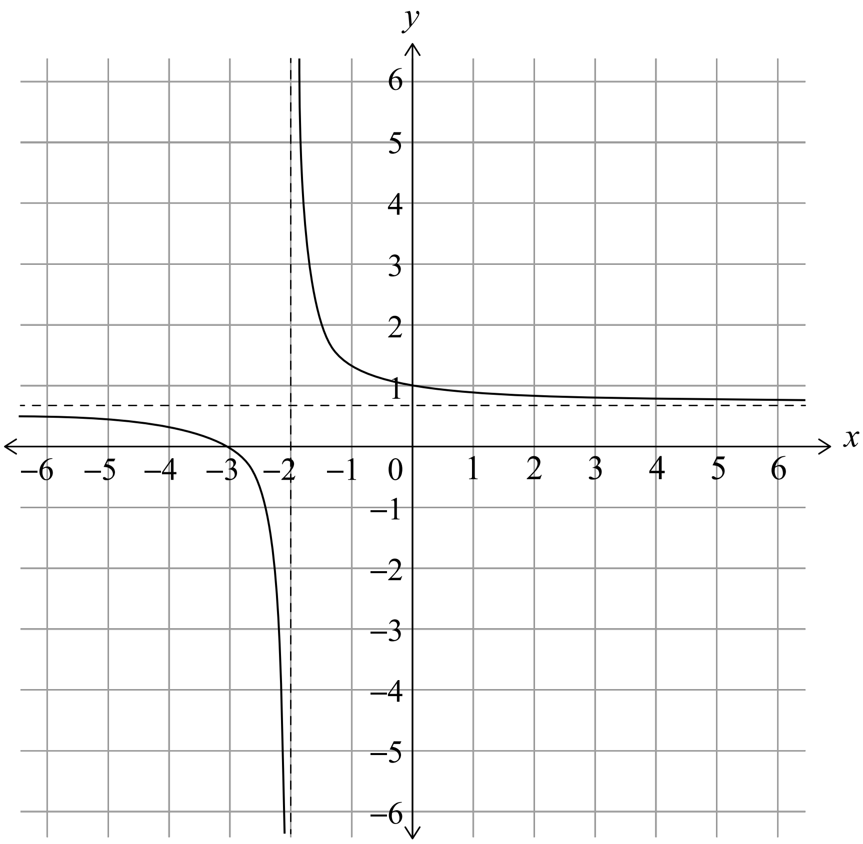
(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 5)

6. [Maximale Punktzahl: 8]

Eine Funktion f ist definiert durch $f\left(x\right)=\dfrac{2\left(x+3\right)}{3\left(x+2\right)}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -2$.

Der Graph $y = f(x)$ ist im folgenden Diagramm dargestellt.



(a) Notieren Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote. [1]

Betrachten Sie $g(x) = mx + 1$, mit $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

(b) (i) Notieren Sie die Anzahl der Lösungen von $f(x) = g(x)$ für $m > 0$.

(ii) Bestimmen Sie den Wert von m so, dass $f(x) = g(x)$ nur eine Lösung in x besitzt.

(iii) Bestimmen Sie den Bereich der Werte für m, für die $f(x) = g(x)$ zwei Lösungen mit $x \geq 0$ besitzt. [7]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 6)

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

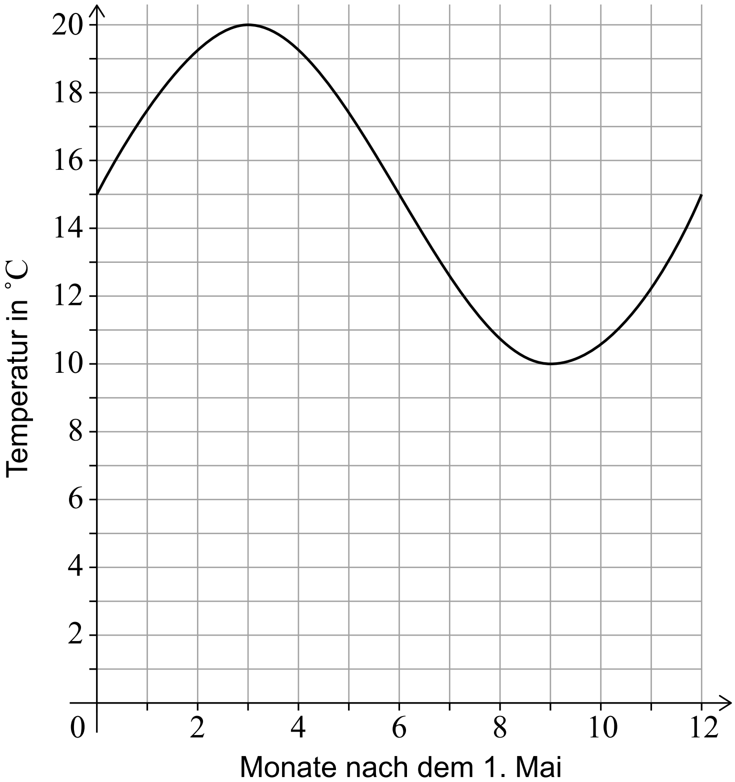
Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

7. [Maximale Punktzahl: 12]

Alex schwimmt nur im Meer, wenn die Wassertemperatur mindestens $15°\,C$ beträgt. Alex geht jedes Jahr Anfang Mai, wenn das Wasser warm genug ist, zum ersten Mal in der Nähe seines Hauses ins Meer.

Alex modelliert die Wassertemperatur zur Mittagszeit mit der Funktion $f(x) = a\sin bx + c$ für $0 \le x \le 12$. Dabei beschreibt x die Anzahl der Monate nach dem 1. Mai und es gilt $a,\ b,\ c > 0$.

Der Graph von $y = f(x)$ ist im folgenden Diagramm dargestellt.



(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 7)

(a) Zeigen Sie, dass $b = \frac{\pi}{6}$. [1]

(b) Notieren Sie die Werte von

(i) a;

(ii) c. [2]

Alex fährt in den Urlaub und modelliert die Wassertemperatur des Meeres zur Mittagszeit am Urlaubsort mit der Funktion $g(x) = 3.5\sin\frac{\pi}{6}x + 11$. Dabei beschreibt x mit $0 \le x \le 12$ die Anzahl der Monate nach dem 1. Mai.

(c) Benutzen Sie dieses neue Modell $g(x)$ um

(i) die Wassertemperatur zur Mittagszeit am 1. Oktober, also fünf Monate nach dem 1. Mai, zu finden.

(ii) zu zeigen, dass die Wassertemperatur zur Mittagszeit für Alex nie warm genug zum Schwimmen ist. [6]

(d) Alex vergleicht die beiden Modelle und stellt fest, dass $g(x) = 0,7\,f(x) + q$ gilt. Bestimmen Sie den Wert von q. [3]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

8. [Maximale Punktzahl: 17]

Die Ableitung einer Funktion f sei $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$, für $x \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Zeigen Sie, dass $x^2 + 2x + 2 > 0$ für alle Werte von x gilt.

(ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit die Werte von x, für die f wächst. [3]

(b) (i) Notieren Sie den Wert von x, für den $f'(x) = 0$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $f''(x) = \frac{-2x^2 - 4x}{(x^2+2x+2)^2}$.

(iii) Begründen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass der Wert von x aus Teil (b)(i) einem lokalen Tiefpunkt auf dem Graphen von f entspricht. [7]

Es gilt: $f(2) = 3 + \ln 10$.

(c) Finden Sie einen Ausdruck für $f(x)$. [4]

(d) Finden Sie die Gleichung der Normalen an den Graphen von f bei $(2, 3 + \ln 10)$. [3]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

9. [Maximale Punktzahl: 16]

Betrachten Sie die arithmetische Folge a, p, $q\ldots$, mit a, p, $q \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $2p - q = a$ gilt. [2]

Betrachten Sie die geometrische Folge a, s, $t\ldots$, mit a, s, $t \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $s^2 = at$ gilt. [2]

Der erste Term der beiden Folgen ist a.

Es gelte $q = t = 1$.

(c) Zeigen Sie, dass $p > \frac{1}{2}$. [2]

Betrachten Sie den Fall für $a = 9$, $s > 0$ und $q = t = 1$.

(d) Notieren Sie die ersten vier Terme der

(i) arithmetischen Folge;

(ii) geometrischen Folge. [4]

Aus der arithmetischen und geometrischen Folge wird eine neue arithmetische Folge u_n gebildet.

Die ersten drei Terme von u_n sind $u_1 = 9 + \ln 9$, $u_2 = 5 + \ln 3$, und $u_3 = 1 + \ln 1$.

(e) (i) Finden Sie die gemeinsame Differenz der neuen Folge in Abhängigkeit von $\ln 3$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^{10} u_i = -90 - 25\ln 3$ gilt. [6]

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.